

Introducción al tema de relaciones

conceptos ✓
 Propiedades ✓
 Operaciones ✓

→ relación $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \# \\ a \times b \end{array} \right.$

$a R b \rightarrow$ grafos



$(a, b) \rightarrow A \times B$

Definición Sean A y B dos conjuntos distintos de vacío. El producto cruz también llamado producto cartesiano entre A y B , representado por $A \times B$, se define como:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

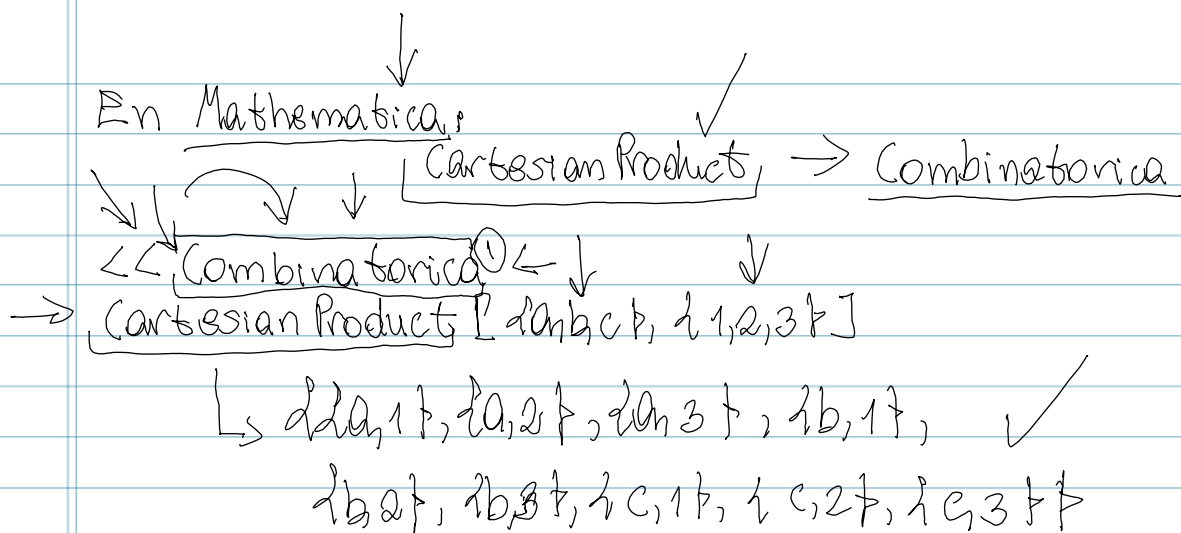
Ejemplo Determine $A \times B$ si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Verifique el resultado por medio del software Mathematica.

"a" → $(a, 1), (a, 2), (a, 3) \leftarrow$
 "b" → $(b, 1), (b, 2), (b, 3) \leftarrow$
 "c" → $(c, 1), (c, 2), (c, 3) \leftarrow$

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 9$$

↓ ↓
3 3



El Kernel se inicializa:

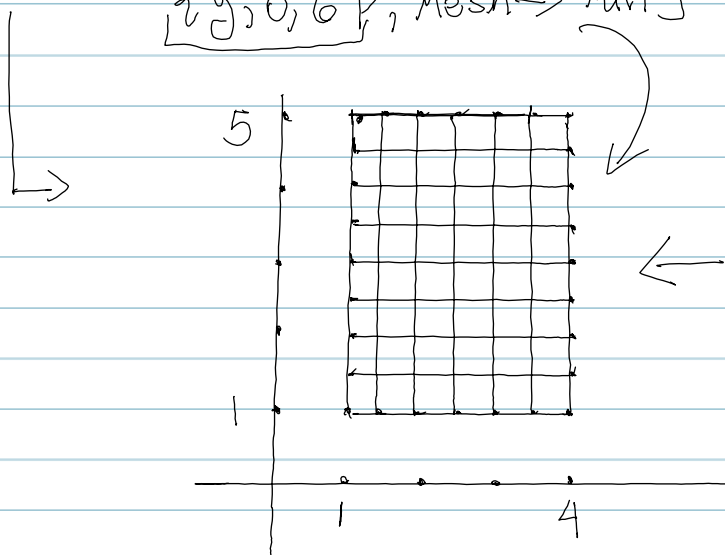
Evaluation / Quit Kernel / Local
Quit []

Ejemplo Represente con el software Mathematica $A \times B$, con
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$.

Solución

$A \times B \rightarrow$ Region Plot

RegionPlot [$x \geq 1 \&\& x \leq 4 \&\& y \geq 1 \&\& y \leq 5$, {x, 0, 5}, {y, 0, 6}, Mesh \rightarrow Full]



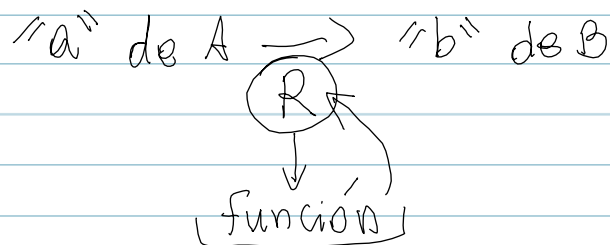
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 \downarrow
 $\boxed{x, y}$

La definición de producto cartesiano se puede generalizar:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_j \in A_j$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n \}$$

Definición Una relación binaria R sobre dos conjuntos A y B distintos de vacío, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se denota $a R b$ y se dice que " a " está relacionado con " b " por R , en caso contrario, se representa la no relación entre " a " y " b " como $a \not R b$. Al conjunto $D = \{a \in A / a R b\}$ se le llama dominio de R y a $Rang = \{b \in B / a R b\}$ se le denomina rango de la relación. Si en particular $A = B$ se dice que R es una relación sobre el conjunto A .



Ejemplo Determine con apoyo de software el dominio y rango de la relación R dada por: $a R b$ sí y solo sí el máximo común divisor entre a y b es igual a uno, con $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ y $b \in \{2, 4, 6, 8\}$, ¿cuáles valores del máximo común divisor satisfacen que la relación R es distinta de vacío?

→ $MCD[n, m] := \text{If}[n == 0, \text{Return}[m], MCD[\text{Mod}[m, n], n]]$

◀ Combinatoria! ▶

$$A = \{1, 3, 5, 7\};$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\};$$

→ $\text{Prod Cart} = \text{Cartesian Product}[A, B];$

→ $R = \{ \};$

→ For $[i = 1, i \leq \text{Length}[\text{Prod Cart}], L = \text{Prod Cart}[[i]]];$
 If $[MCD[L[[1]], L[[2]]] == 1, \text{Append}[R, L]; i++]; \text{Print}[R]$

Esto nos produce:

$\rightarrow \{ \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{1,8\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{3,8\}, \{5,2\}, \{5,4\}, \{5,6\}, \{5,8\}, \{7,2\}, \{7,4\}, \{7,6\}, \{7,8\} \}$

$$R = \underbrace{\{1, 3, 5, 7\}}_A \times \underbrace{\{2, 4, 6, 8\}}_B - \{3, 6\}$$

Por otra parte: $(R) \neq \emptyset$

$MCD[n-, m-] := \text{if } [n == 0, \text{return } [m], MCD[$

$\text{Mod}[m, n], n]]$

<<Combinatoria>

$A = \{1, 3, 5, 7\};$

$B = \{2, 4, 6, 8\};$

$\text{ProdCart} = \text{Cartesian Product}[A, B];$

$\rightarrow j = 1;$
 $\rightarrow \text{While } [j \leq \text{Max}[A] \text{ || } j \leq \text{Max}[B], R = \{ \};$
 $\text{For } [i = 1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], i = \text{ProdCart}[R[i]];$
 $\text{if } [MCD[\text{Length}[R], \text{Length}[R]]] = j, R = \text{Append}[R, i];$
 $i++];$
 $\text{if } [\text{Length}[R] \neq 0, \text{Print}[j], j++]$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo sea $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ y (R) una relación definida sobre A , tal que: $a R b \Leftrightarrow (a \mid b)$. Mediante el software Mathematica encuentre explícitamente el conjunto (R) y su cardinalidad

<<Combinatoria> ✓

$\rightarrow A = \{ \};$

$\rightarrow \text{For } [i = 1, i \leq 100, A = \text{Append}[A, i], i++]$

$\text{ProdCart} = \text{Cartesian Product}[A, A];$

```

R = {}
for i = 1, i ≤ Length[ProdCart], L = ProdCart[i];
  IF [L[1]] < L[2], R = Append[R, L]; i++
Print "La cardinalidad de R es ", Length[R], " y la
relación es: ", R
  
```

5050 → (R)

Ejemplo Represente en el plano cartesiano la relación R definida como: aRb , siendo a y b dos números reales, si y solo si satisfacen la ecuación $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1$.

Construya una función en Mathematica que determine si dados dos números reales (a y b): aRb . Pruebe esta función con: $(-5, 0)$ y $(1/4, 1/25)$. ¿Cuál es el dominio de R ? ¿Cuál es el rango de R ?

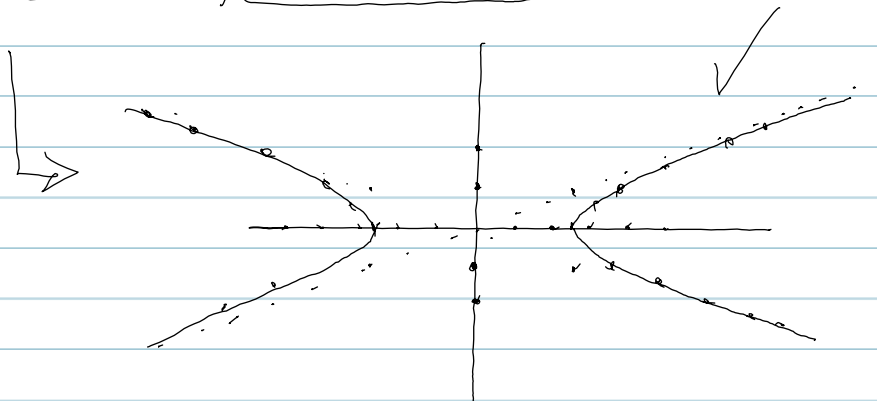
$$\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \checkmark$$

hipérbola

En Mathematica:

ContourPlot[$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, {x, -20, 20}, {y, -8, 8}]

Axes → True, Frame → False,



Una función en Mathematica:

$\text{EsR}[a, b] := \text{If}[\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} == 1, \text{Print}[a, "R", b], \text{Print}[a, "NR", b]]$

Al correr la función en $(-5, 0)$ y $(1/4, 1/25)$ obtenemos

$\text{EsR}[-5, 0] \rightarrow -5 \text{ R } 0$

$\text{EsR}[1/4, 1/25] \rightarrow 1/4 \text{ NR } 1/25$

Por otra parte: $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1, b = 0$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

$$D = \{a \in \mathbb{R} / a \leq -5 \wedge a \geq 5\}$$

Para el rango:

$$\text{Rang} = \mathbb{R}$$

Ejemplo Realice un programa en Mathematica que determine si "a" está relacionado con "b" a través de R, siendo $a, b \in \{1, 3, 5, \dots, 99\}$ y R la relación: $aRb \Leftrightarrow b^3 \geq a$; Esta $63 \text{ R } 97$ y $63 \text{ R } 3$?

<< Combinatoria >>

```
EsOR[B_List] := Module[{A = {}, R = {}},
  For[i = 1, i <= 99, A = Append[A, i], i += 2];
  ProdCart = CartesianProduct[A, A];
  For[i = 1, i <= Length[ProdCart], D = ProdCart[[i]];
    If[(Length[D])^3 >= Length[D], R = Append[R, D], i += 1];
    If[MemberQ[B, D] == True, Return[True], Return[False]]];
  Return[R];
```

Luego:

$\overline{63 \cap 97}$

$\rightarrow \text{ESOR}[63, 97] \rightarrow \text{True}$

$\overline{63 \cap 3}$

$\rightarrow \text{ESOR}[\underline{63}, 3] \rightarrow \text{False}$

$63 \cap 3$

Representaciones de una relación binaria

$A \times B$

Definición Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, una relación binaria R de A a B , se puede representar por una matriz de tamaño n por m , denotada $M_R = (m_{ij})$, tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R b_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(R)

Ejemplo $a R b$ si y solo si el máximo común divisor entre a y b es igual a uno, con $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ y $b \in \{2, 4, 6, 8\}$. Diseñe un programa en Mathematica que retorne M_R

$R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (3,2), (3,4), (3,8), (5,2), (5,4), (5,6), (5,8), (7,2), (7,4), (7,6), (7,8)\}$

→

1	1	1	1	1
3	1	1	0	1
5	1	1	1	1
7	1	1	1	1

En Mathematica:

$MCD[n, m] := \text{If}[n == 0, \text{Return}[m], MCD[\text{Mod}[m, n], n]]$

<< Combinatoria

$A = \{1, 3, 5, 7\};$

$B = \{2, 4, 6, 8\};$

$\text{ProdCart} = \text{CartesianProduct}[A, B];$

$R = \{ \};$

For $[i = 1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], L = \text{ProdCart}[[i]]];$

If $[MCD[L[[1]], L[[2]]] == 1, R = \text{Append}[R, L]];$

$i++]$

↓
 Para devolver M_R :

→ $M_R = \text{ConstantArray}[0, \{\text{Length}[A], \text{Length}[B]\}];$

For $[i=1, i \leq \text{Length}[A]]$
 For $[j=1, j \leq \text{Length}[B]]$

IF $[\text{MemberQ}[R, \{A[[i]], B[[j]]\}]] == \text{True}$

→ $M_R = \text{ReplacePart}[M_R, 1, \{i, j\}]; j++; i++$
 Print $["La matriz de la relación R es: ", \text{MatrixForm}[M_R]]$

Ejemplo $aRb \Leftrightarrow b^3 \geq a, a, b \in \{1, 3, 5, \dots, 99\}$
 Encuentre la matriz de la relación R.

↓
 M_R

En Mathematica:
 (* Encuentra R *)

<< Combinatorica

$A = \{ \};$

For $[i=1, i \leq 99, A = \text{Append}[A, i]; i += 2];$

$R = \{ \};$

$\text{ProdCart} = \text{CartesianProduct}[A, A];$

For $[i=1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], L = \text{ProdCart}[[i]];$

IF $[(L[[2]])^3 \geq L[[1]], R = \text{Append}[R, L]; i++]$

(* Se construye la matriz de la relación R *)

$M_R = \text{ConstantArray}[0, \{\text{Length}[A], \text{Length}[A]\}];$

For $[i=1, i \leq \text{Length}[A]]$

For $[j=1, j \leq \text{Length}[A]]$

IF $[\text{MemberQ}[R, \{A[[i]], A[[j]]\}]] == \text{True},$

$M_R = \text{ReplacePart}[M_R, 1, \{i, j\}]; j++; i++;$

Print $[\text{MatrixForm}[M_R]]$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

grafo \rightarrow digrafo

Digrapho

$$a_i R a_j$$

$$a_i \longrightarrow a_j$$

Adjacency Graph M_R

Ejemplo Represente por medio de una gráfica la relación $R = \{ (a,b) \mid a+b \geq 6 \}$ definida sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En Mathematica:

(* Encuentra R *)

<< Combinatoria

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ✓

ProdCart = CartesianProduct[A, A]; ✓

$R = \{ \}$ ✓

For [i=1, i ≤ Length[ProdCart], L = ProdCart[[i]];

If [Length[L] ≥ 6, R = Append[R, L]; i++]

(* Se construye la matriz de la relación R y dibuja su gráfica *)

$M_R = \text{ConstantArray}[0, \text{Length}[A], \text{Length}[A]]$ ✓

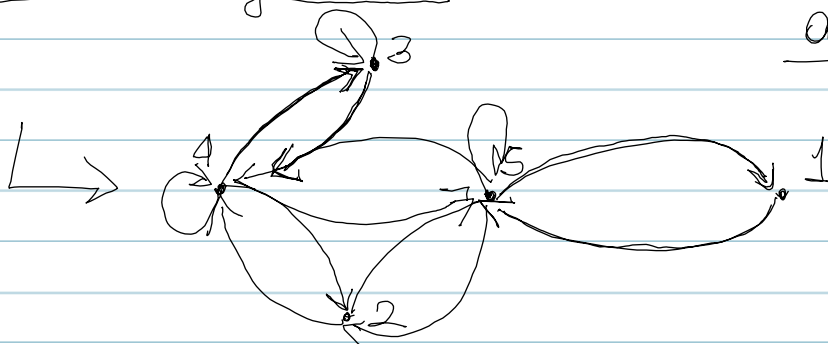
For [i=1, i ≤ Length[A],

For [j=1, j ≤ Length[A],

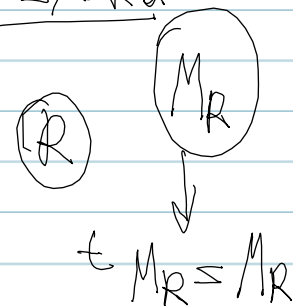
If [MemberQ[R, {A[[i]], A[[j]]}] == True,

$M_R = \text{ReplacePart}[M_R, 1, \{i, j\}]$; j++]; i++]

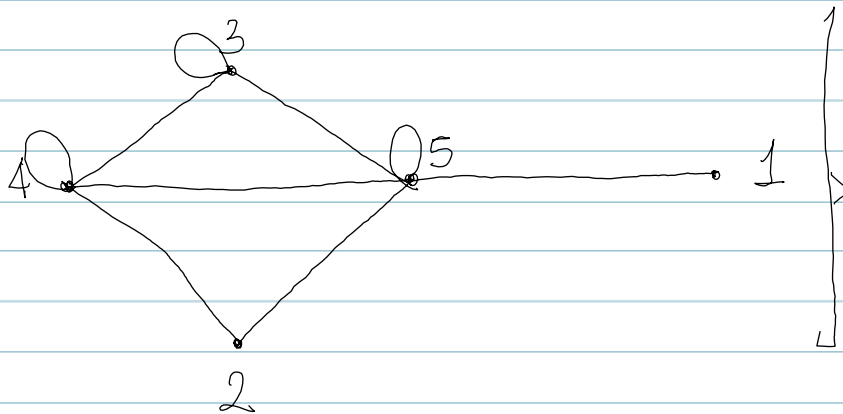
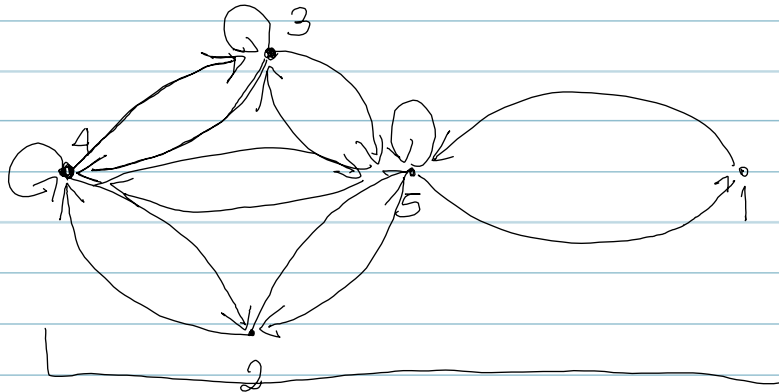
AdjacencyGraph[M_R , VertexLabels → "Name", ImagePadding → 10,
 DirectedEdges → True]



$$a R b \Rightarrow b R a$$



En una relación simétrica el grafo se puede reducir:



Ejemplo sea $A = \{2^V, 4^V, \dots, 100^V\}$ y R la relación binaria $aRb \Leftrightarrow a = b^k, k \in \mathbb{N}$. Grafique R por medio de un digrafo

$$aRb \Rightarrow a = b^k \Rightarrow k = \frac{\ln a}{\ln b} \in \mathbb{N}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\ln \quad \ln$

(* Encuentra $(R)^*$)

<< Combinatoria

$A = \{p_j\}$

For $[i=2, i \leq 100, A = \text{Append}[A, i]; i += 2]$ ✓

ProdCart = CartesianProduct[A, A]; $(R = \{p_j\})$ ✓

→ For $[i=1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], L = \text{ProdCart}[[i]];$

→ $v = N \lceil \frac{\log[L[1]]}{\log[L[2]]} \rceil;$

If $\lfloor \text{Floor}[v] \rfloor = v, R = \text{Append}[R, L]; i++]$

(se construye la matriz de la relación R y dibuja su gráfica)

$M_R = \text{Constant Array } [0, \text{Length}[A], \text{Length}[A]];$ ✓
For $i=1, i \leq \text{Length}[A],$
For $j=1, j \leq \text{Length}[A],$ ↓ ↓
If $[\text{MemberQ}[\{R, \text{ADD}[i], \text{ADD}[j]\}] == \text{True},$
 $M_R = \text{Replace Part } [M_R, 1, \text{ADD}[i], \text{ADD}[j]]; j++]; i++]$

Adjacency Graph $[M_R], \text{Vertex Labels} \rightarrow \text{Table}[i \rightarrow 2i, \{i, 50\}],$
Image Padding $\rightarrow 10]$

Operaciones de las relaciones $\cup, \cap, -$

Definición Sean (R_1) y (R_2) dos relaciones definidas de A a B . Entonces:

1. La relación unión entre R_1 y R_2 denotada $R_1 \cup R_2$, es tal que:
 $a (R_1 \cup R_2) b$ si y solo si $a R_1 b$, o bien, $a R_2 b$.

2. La relación intersección de R_1 y R_2 denotada $R_1 \cap R_2$, se define como: $a (R_1 \cap R_2) b$ si y solo si $a R_1 b$ y $a R_2 b$.

3. La relación complementaria de (R) con notación \bar{R} , corresponde a:
 $a \bar{R} b$ si y solo si $a \notin R b$

$\cup, \cap, -$

Ejemplo Determine con ayuda de Mathematica las relaciones unión e intersección entre R_1 y R_2 , si $R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3)\}$ y $R_2 = \{(a,b) \mid a-b=1\}$ con $a, b \in \{1,2,3, \dots, 100\}$. Halle además, \bar{R}_2 .

Union ✓

Intersection ✓

Complement ✓

$(R_1) = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3)\}$ ✓

(* Encuentra (R_2) *)

<< Combinatoria

$A = \{1\}$;

For $[i=1, i \leq 100, A = \text{Append}[A, i]; i++]$ ✓

ProdCart = CartesianProduct $[A, A]$; ✓

$R_2 = \{1\}$;

For $[i=1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], L = \text{ProdCart}[[i]]];$

If $[L[[1]] - L[[2]] \neq 1]$,

$R_2 = \text{Append}[R_2, L]; i++]$

(Se realizan las operaciones*)

Relacion Union = Union $[R_1, R_2]$;

Relacion Interseccion = Intersection $[R_1, R_2]$;

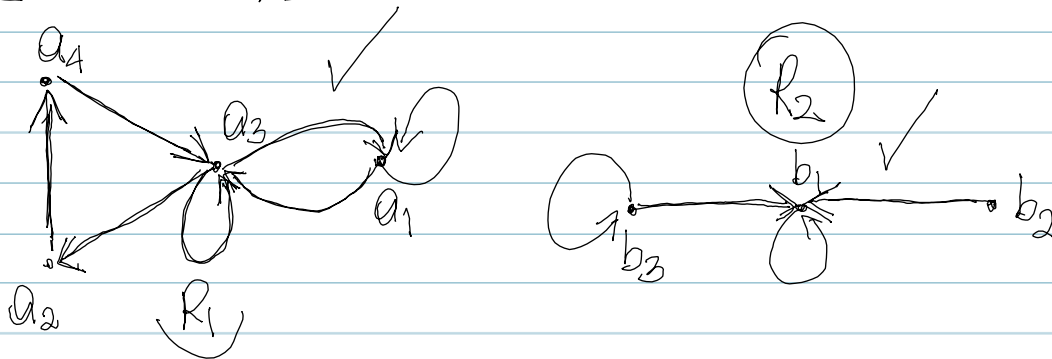
Relacion Complementaria = Complement $[ProdCart, R_2]$;

Print $[R_1 \cup R_2 = "$, Relacion Union];

Print $[R_1 \cap R_2 = "$, Relacion Interseccion];

Print $[R_2 = "$, Relacion Complementaria];

Ejemplo Considere las gráficas de dos relaciones R_1 y R_2 . Encuentre:
 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ y \bar{R}_1 .



Por los grafos:

$$R_1 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_3)\}$$

$$R_2 = \{(b_1, b_1), (b_2, b_1), (b_3, b_1), (b_3, b_3)\}$$

Finalmente:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_3), (b_1, b_1), (b_2, b_1), (b_3, b_1), (b_3, b_3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \times \{a_1, a_2, a_3, a_4\} - R_1 \\ &= \{(a_1, a_2), (a_1, a_4), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_4)\} \end{aligned}$$

Relación Inversa

Definición Sea R una relación de A a B . Se llama relación inversa de R y se representa como R^{-1} a la relación:

$$a R^{-1} b \Leftrightarrow b R a, \checkmark$$

Ejemplo Si $R = \{(a, b) \mid a + b^2 = 12\}$ con $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$,
 halle R^{-1} .

En Mathematica:

(* Encuentra R *)

<< Combinatoria

$A = \{ \}$;

For $i = 1, i \leq 20, A = \text{Append}[A, i]; i++$;

ProdCart = CartesianProduct[A, A];

$R = \{ \}$;

For $i = 1, i \leq \text{Length}[\text{ProdCart}], L = \text{ProdCart}[[i]]$;

If $[L[[1]] + (L[[2]])^2] == 12, R = \text{Append}[R, L]; i++$

(* Calcula la inversa de R *) $a R b \Rightarrow b R^{-1} a$

$\text{InvR} = R$;

For $i = 1, i \leq \text{Length}[R], \text{InvR}[[i, 1]] = R[[i, 2]]$;

$\text{InvR}[[i, 2]] = R[[i, 1]]$; $i++$;

Print[InvR];

Out[]

$\{(3, 3), (2, 8), (1, 11)\}$

Composición de relaciones

Definición, Sea R_2 una relación de A a B y R_1 otra de B a C .
 La relación composición $R_1 \circ R_2$ se define de A a C , y es tal que:

$$a (R_1 \circ R_2) c \Leftrightarrow \exists b, b \in B \text{ donde } a R_2 b \text{ y } b R_1 c$$

Ejemplo Trabare con Mathematica un programa que calcule $R_1 \circ R_2$, si $R_1 = \{(b, c) \mid b > c\}$ y $R_2 = \{(a, b) \mid a < b\}$ con $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

En el software: ✓
 (* Encuentra (R_1) *)

// Combinatoria

A = {};

For [i = 1, i ≤ 10, A = Append[A, i]; i++]; ✓

ProdCart = CartesianProduct[A, A]; ✗

$R_1 = \{ \}$; ✓

For [i = 1, i ≤ Length[ProdCart], L = ProdCart[[i]]; ✓

If [Length[L] > 0, $R_1 = \text{Append}[R_1, L]$; i++]

(* Encuentra (R_2) *)

$R_2 = \{ \}$;

For [i = 1, i ≤ Length[ProdCart], L = ProdCart[[i]]; ✓

If [Length[L] > 0, $R_2 = \text{Append}[R_2, L]$; i++]

→ (* Calcula la composición *)

Composicion = {};

For [i = 1, i ≤ Length[R2], For [j = 1, j ≤ Length[R1], ✓

If [R2[[i, 2]] == R1[[j, 1]], → $(a, b) - (b, c)$

Composicion = Append[Composicion,

$R_2[[i, 1]], R_1[[j, 2]]$]; j++]; i++]

Print [DeleteDuplicates[Composicion]]

↓

Operaciones de relaciones con matrices booleanas $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

Definición Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices booleanas, entonces:

1. Si A y B son de tamaño $n \times m$, la unión denotada $A \vee B$, se define como la matriz booleana $C = (c_{ij})$ de dimensión $n \times m$, tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} = 1 \text{ o } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \text{ y } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

2. Si A y B son de tamaño $n \times m$, la conjunción $A \wedge B$, se define como la matriz booleana $C = (c_{ij})$ de dimensión $n \times m$, tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} = 1 \text{ y } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \text{ o } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

3. El complemento de A representado por \bar{A} es una matriz booleana $n \times m$, $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ donde si $a_{ij} = 1$ la entrada $c_{ij} = 0$ y viceversa, si $a_{ij} = 0$ la entrada $c_{ij} = 1$.

4. Si A es de tamaño $(n \times p)$ y B es de tamaño $(p \times m)$, el producto denotado $A \odot B$, es la matriz $C = (c_{ij})$ de dimensión $n \times m$ con:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ik} = 1 \text{ y } b_{kj} = 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p \overbrace{a_{ik} b_{kj}}^{\text{producto punto}}$$

Ejemplo Desarrolle en Mathematica cuatro funciones que resuelvan las operaciones de unión, intersección, complemento y producto de matrices booleanas.

- La Unión:
Union Booleana [A_List, B_List] :=
Module [d, L = Dimensions [A], n = L[[1]]; m = L[[2]];
→ Matriz = ConstantArray [0, d, m];
For [i = 1, i ≤ n,
For [j = 1, j ≤ m, If [Or [A[[i, j]] = 1, B[[i, j]] = 1],
Matriz = ReplacePart [Matriz, 1, d, i, j]; j++;
i++; Print [MatrixForm [Matriz]]]

Para garantizar el uso correcto de esta función:

```

n = Input ["Digite la cantidad de filas:"];
m = Input ["Digite la cantidad de columnas:"];
A = ConstantArray [0, d, m];
B = ConstantArray [0, d, m];
For [i = 1, i ≤ n,
For [j = 1, j ≤ m,
v = Input ["Digite la entrada de la primera matriz:"];
A = ReplacePart [A, v, d, i, j]; j++; i++;
For [i = 1, i ≤ n,
For [j = 1, j ≤ m,
v = Input ["Digite la entrada de la segunda matriz:"];
B = ReplacePart [B, v, d, i, j]; j++; i++;

```

- La Conjunción:
Interseccion Booleana [A_List, B_List] := Module [d, L = Dimensions [A],
n = L[[1]]; m = L[[2]]; Matriz = ConstantArray [0, d, m];
For [i = 1, i ≤ n,
For [j = 1, j ≤ m, If [And [A[[i, j]] = 1, B[[i, j]] = 1],
Matriz = ReplacePart [Matriz, 1, d, i, j]; j++; i++;
Print [MatrixForm [Matriz]]]

- El complemento:
 complemento Booleano [A-List]:=
 Module [L = Dimensions [A]], n = L [Z1] ; m = L [Z2] ;
 → Matriz = ConstantArray [0, d, n, m] ;
 { For [i = 1, i ≤ n,
 { For [j = 1, j ≤ m, If [A [Z1, i, j]] = 1,
 Matriz = ReplacePart [Matriz, 0, d, i, j] ;
 Matriz = ReplacePart [Matriz, 1, d, i, j] ; j++ ; i++ ;
 Print [MatrixForm [Matriz]]]]

La matriz A se puede cargar así:

- { n = Input ["Digite la cantidad de filas:"] ;
 m = Input ["Digite la cantidad de columnas:"] ;
 A = ConstantArray [0, d, n, m] ;
 { For [i = 1, i ≤ n,
 { For [j = 1, j ≤ m,
 v = Input ["Digite la entrada de la matriz:"] ;
 A = ReplacePart [A, v, d, i, j] ; j++ ; i++]]

- El producto:
 Producto Booleano [A-List, B-List]:=
 Module [L = Dimensions [A], OL = Dimensions [B]],
 n = L [Z1] ; p = L [Z2] ; m = OL [Z2] ;
 → Matriz = ConstantArray [0, d, n, m] ;
 { For [i = 1, i ≤ n,
 { For [j = 1, j ≤ m,
 { For [k = 1, k ≤ p, If [And [A [Z1, i, k], B [Z2, k, j]]] = 1,
 Matriz = ReplacePart [Matriz, 1, d, i, j] ; k++ ; j++ ;
 i++ ; Print [MatrixForm [Matriz]]]]]

El siguiente código construye las matrices A y B para efectuar el producto booleano:

```

n = Input ["Digite la cantidad de filas de la primera matriz: "];
p = Input ["Digite la cantidad de columnas de la primera matriz: "];
m = Input ["Digite la cantidad de columnas de la segunda matriz: "];
→ A = ConstantArray [0, n, p];
→ B = ConstantArray [0, p, m];
  For [i = 1, i ≤ n,
    { For [j = 1, j ≤ p,
      { v = Input ["Digite la entrada de la primera matriz: "];
        A = ReplacePart [A, v, {i, j}]; j++ } i++ }
  For [i = 1, i ≤ p,
    { For [j = 1, j ≤ m,
      { v = Input ["Digite la entrada de la segunda matriz: "];
        B = ReplacePart [B, v, {i, j}]; j++ } i++ }

```

Teorema Sean (R_1) y (R_2) relaciones sobre un conjunto A con matrices M_{R_1} y M_{R_2} respectivamente, entonces:

$$1. \underline{M_{R_1 \cup R_2}} = \underline{M_{R_1}} \vee \underline{M_{R_2}}$$

$$2. \underline{M_{R_1 \cap R_2}} = \underline{M_{R_1}} \wedge \underline{M_{R_2}}$$

$$3. \underline{M_{\bar{R}_1}} = \overline{\underline{M_{R_1}}}$$

$$4. \underline{M_{R_1^{-1}}} = \left(\underline{M_{R_1}} \right)^t$$

$$5. \underline{M_{R_1 \circ R_2}} = \underline{M_{R_2}} \odot \underline{M_{R_1}}$$

$\cup, \cap, -, ^{-1}, \circ$

Ejemplo Sean dos relaciones (R_1) y (R_2) definidas sobre $A = \{a, b, c, d\}$, dadas por sus matrices de representación:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $\overline{R_1}$, R_1^{-1} y $R_1 \circ R_2$. Construya un digrafo para $R_1 \circ R_2$.

Al ejecutar las funciones creadas en el ejemplo anterior:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \cup R_2} = \text{Union Booleana} [M_{R_1}, M_{R_2}] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = \text{Interseccion Booleana} [M_{R_1}, M_{R_2}] \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{R_1}} = \text{Complemento Booleano} [M_{R_1}] \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1^{-1}} = \text{Matrix Form} [\text{Transpose} [M_{R_1}]] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \circ R_2} = \text{Producto Booleano} [M_{R_2}, M_{R_1}] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,a), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,b), (d,c), (d,d)\}$$

$$\rightarrow R_1 \cap R_2 = \{(a,c), (b,b), (c,a), (c,c), (d,b)\}$$

$$\rightarrow \overline{R_1} = \{(a,b), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (d,a), (d,c), (d,d)\}$$

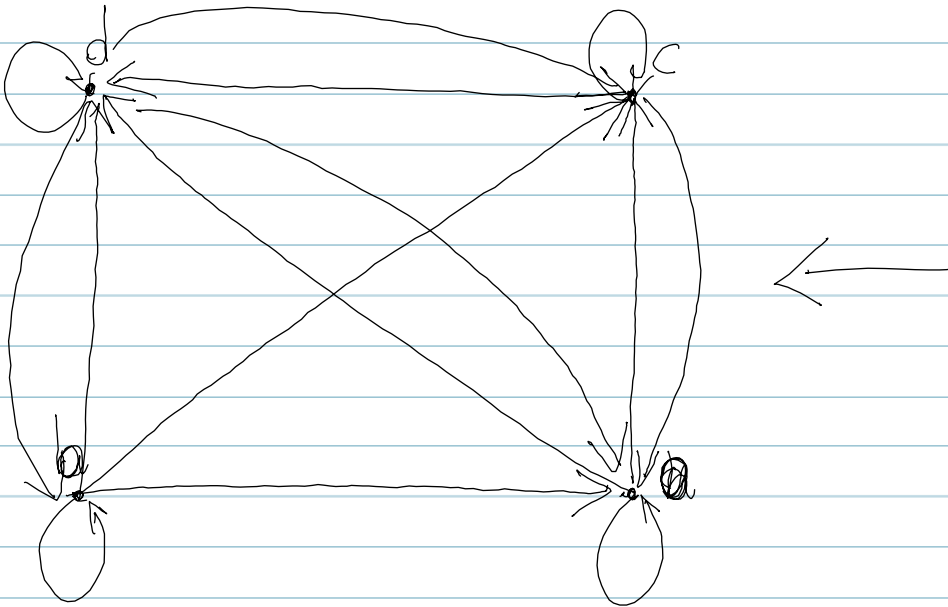
$$\rightarrow R_1^{-1} = \{(a,a), (a,c), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (d,c)\}$$

$$\rightarrow R_1 \circ R_2 = \{(a,a), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$$

El digrafo de $R_1 \circ R_2$:

Adjacency Graph $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ ✓

Vertex Labels $\rightarrow \{1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 4 \rightarrow d\}$, Image Padding $\rightarrow 10$,
Directed Edges $\rightarrow \text{true}$



Tipos de relaciones

Definición Sea (R) una relación definida sobre un conjunto (A) , entonces:

1. Se dice que R es reflexiva si y solo si $\forall a, a \in A$ se satisface aRa .
2. Se dice que R es simétrica si y solo si $\forall (a,b) \in R$ se cumple $(b,a) \in R$.
3. Se dice que R es antisimétrica si y solo si $\forall (a,b) \in R, a \neq b$ se tiene $(b,a) \notin R$.
4. Se dice que R es transitiva si $\forall (a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ se satisface $(a,c) \in R$.
5. Si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva se dice que R es una relación de equivalencia.
6. Si R es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice que R es una relación de orden parcial.

Ejemplo Diseña en Mathematica una función que determine si dada una relación finita sobre un conjunto (A) , esta es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden parcial.

El programa adjunto resuelve lo solicitado:

```
Tiporelacion[(R_List, (A_List)]:=
Module[{bandera=0}, ESReflexiva=True; ESSimetrica=True;
ESAntisimetrica=True; ESTransitiva=True;
→ For[i=1, i<Length[A], IF[MemberQ[R, {A[[i]], A[[i]]}],
==False, bandera=1; Break[]]; i++];
→ IF[bandera==1, Print["La relación no es reflexiva"];
ESReflexiva=False; Print["La relación es reflexiva"]];
```

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

bandera = 0; For [i = 1, i ≤ Length[R],
 IF [MemberQ[R, dR[[i, 2]], R[[i, 1]]] == False,
 → bandera = 1; Break[]; i++;
 → IF [bandera == 1, Print["La relación no es simétrica"];
Es Simétrica = False; Print["La relación es simétrica"]];

bandera = 0; For [i = 1, i ≤ Length[R], (a,b) ∈ R, a ≠ b ⇒ (b,a) ∉ R
 IF [MemberQ[R, dR[[i, 2]], R[[i, 1]]] == True &&
 R[[i, 1]] ≠ R[[i, 2]], bandera = 1; Break[]; i++;
 → IF [bandera == 1, Print["La relación no es antisimétrica"];
Es Antisimétrica = False;
 Print["La relación es antisimétrica"]];

$$(a,b), (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

bandera = 0;
 For [i = 1, i ≤ Length[R],
 For [j = 1, j ≤ Length[R],
 IF [R[[i, 2]] == R[[j, 1]] &&
 MemberQ[R, dR[[i, 1]], R[[j, 2]]] == False,
 → bandera = 1; Break[]; Break[]; j++; i++;
 → IF [bandera == 1, Print["La relación no es transitiva"];
Es Transitiva = False; Print["La relación es transitiva"]];

→ IF [Es Reflexiva == True && Es Simétrica == True && Es Transitiva == True,
 Print["La relación es de equivalencia"]];

→ IF [Es Reflexiva == True && Es Antisimétrica == True &&
 Es Transitiva == True,
 Print["La relación es de orden parcial"]];

Ejemplo Utilice la función del ejemplo anterior, para caracterizar las relaciones sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dadas a continuación:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$ ✓
2. $R_2 = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$ ✓
3. $R_3 = \emptyset$ ✓
4. $R_4 = \{(1,2), (1,3), (3,1), (1,1), (3,3), (3,2), (1,4), (4,2), (3,4)\}$ ✓

Al correr el código tenemos:

Print[" R_1 :"] ✓

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; ✓

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$; ✓

tipoRelacion [R_1, A]

Print[" R_2 :"] ✓

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; ✓

$R_2 = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$; ✓

TipoRelacion [R_2, A]

Print[" R_3 :"] ←

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; ✓

$R_3 = \emptyset$; ←

→ TipoRelacion [R_3, A]

Print[" R_4 :"]

$A = \{1, 2, 3, 4\}$;

$R_4 = \{(1,2), (1,3), (3,1), (1,1), (3,3), (3,2), (1,4), (4,2), (3,4)\}$; ✓

TipoRelacion [R_4, A]

Teorema Sea R una relación sobre un conjunto finito A y M_R su matriz asociada, luego:

1. R es reflexiva si y solo si M_R es una matriz donde la diagonal principal está formada por unos.

2. R es simétrica si y solo si M_R es una matriz simétrica, es decir, $(M_R)^t = M_R$.

3. R es antisimétrica si y solo si los elementos simétricamente colocados con respecto a la diagonal principal de M_R , son uno o el opuesto binario del otro, es decir, si hay un 1 como entrada, en la posición simétrica de la matriz M_R debe haber un 0 y viceversa, si hay un 0 en la posición simétrica debe haber un 1 .

4. R es transitiva si y solo si $M_R \odot M_R = M_R$.

Ejemplo Elabore un programa en Mathematica que indique si una relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden parcial, dada su matriz de representación.

El código siguiente crea la función pediola:

Producto Booleano [A_List , B_List] :=

Module [$\{L = \text{Dimensions}[A]$, $OL = \text{Dimensions}[B]\}$,

$n = L[[1]]$; $p = L[[2]]$; $m = OL[[2]]$;

$Matriz = \text{ConstantArray}[0, \{n, m\}]$;

For [$i = 1, i \leq n$,

For [$j = 1, j \leq m$,

For [$k = 1, k \leq p$, If [$\text{And}[A[[i, k]] == 1, B[[k, j]] == 1$,

$Matriz = \text{ReplacePart}[Matriz, 1, \{i, j\}]$; $k++$; $j++$;

$i++$]; Return [$Matriz$]]


```

Tipo_M_Relacion [ M_List ] :=
Module [ bandera = 0, L = Dimensions [ M ]; n = L [ 1 ] ];
EsReflexiva = True; EsSimetrica = True;
EsAntisimetrica = True; EsTransitiva = True;

→ For [ i = 1, i ≤ n, & [ M [ i, i ] ] ≠ 1, bandera = 1; Break [ ] ]; i++ ];
→ If [ bandera == 1, Print [ "La relación no es reflexiva" ];
EsReflexiva = False; Print [ "La relación es reflexiva" ] ];

→ bandera = 0; If [ M ≠ Transpose [ M ], bandera = 1 ];
→ If [ bandera == 1, Print [ "La relación no es simétrica" ];
EsSimetrica = False; Print [ "La relación es simétrica" ] ];

→ bandera = 0; For [ i = 1, i ≤ n, For [ j = 1, j ≤ n,
If [ M [ i, j ] ≠ M [ j, i ] & i ≠ j, bandera = 1; Break [ ] ];
Break [ ] ]; j++ ]; i++ ];
→ If [ bandera == 1, Print [ "La relación no es antisimétrica" ];
EsAntisimetrica = False; Print [ "La relación es antisimétrica" ] ];

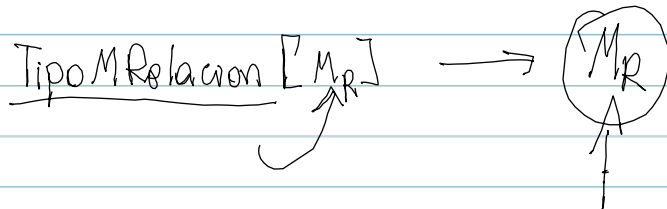
→ bandera = 0; B = Producto Booleano [ M, M ];
{ For [ i = 1, i ≤ n,
{ For [ j = 1, j ≤ n, If [ M [ i, j ] ≠ B [ i, j ], bandera = 1;
Break [ ] ]; Break [ ] ]; j++ ]; i++ ];
→ If [ bandera == 1, Print [ "La relación no es transitiva" ];
EsTransitiva = False; Print [ "La relación es transitiva" ] ];

If [ EsReflexiva == True & EsSimetrica == True & EsTransitiva == True,
Print [ "La relación es de equivalencia" ] ];

If [ EsReflexiva == True & EsAntisimetrica == True &
EsTransitiva == True,
Print [ "La relación es de orden parcial" ] ]

```

Ejemplo Determine por medio de la función programada con anterioridad, si la relación: $aRb \Leftrightarrow b^3 \geq a$, donde $a \in \{1, 3, 5, \dots, 99\}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



Ejemplo Conjeture con ayuda de Mathematica, si la relación \leq es de orden parcial sobre el conjunto de los números naturales.

En Mathematica:

<< Combinatorica



```

-> A = 1;
For [i = 1, i <= 100, A = Append [A, i]; i++];
R = 1;
ProdCart = CartesianProduct [A, A];
For [i = 1, i <= Length [ProdCart], L = ProdCart [[i]];
  If [L [[1]] <= L [[2]], R = Append [R, L]; i++];

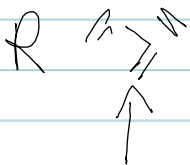
```

```

-> Mr = ConstantArray [0, Length [A], Length [A]];
For [i = 1, i <= Length [A],
  For [j = 1, j <= Length [A],
    If [MemberQ [R, {A [[i]], A [[j]]}] == True,
      Mr = ReplacePart [Mr, 1, {i, j}]; j++]; i++];

```

TipoMRelacion [Mr]



Ejemplo Si R es la relación aRb si y solo si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \equiv r \pmod{3}$ y $b \equiv r \pmod{3}$. Conjeture por medio de software, si R es una relación de equivalencia.

Solución

$$a \equiv r \pmod{3} \rightarrow a-r$$

$$b \equiv r \pmod{3} \rightarrow b-r$$

$$a \div 3 \text{ y } b \div 3 \rightarrow r$$

aRb

En Mathematica:

<< Combinatorica

```

→ A = {}
For [i=1, i<100, A = Append[A, i]; i++];
R = {};
ProdCart = CartesianProduct[A, A];
For [i=1, i<Length[ProdCart], L = ProdCart[[i]];
If [Mod[L[[1]], 3] == Mod[L[[2]], 3], R = Append[R, L];
i++];

```

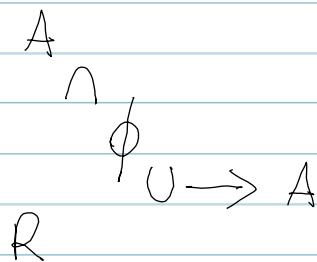
```

Mr = ConstantArray[0, Length[A] Length[A]];
For [i=1, i<Length[A],
For [j=1, j<Length[A],
If [MemberQ[R, {A[[i]], A[[j]]}] == True,
Mr = ReplacePart[Mr, 1, {i, j}]; j++]; i++];

```

Tipo M Relación Mr

Relaciones de equivalencia y particiones



Definición Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Al tomar un elemento $a \in A$ fijo, el conjunto de todos los $b \in A$ para los cuales aRb , denotado $[a]$, se llama clase de equivalencia de la relación, es decir:

$$[a] = \{b \in A / aRb\}$$

$$aRb \quad [a] = [b]$$

Ejemplo Sea dada la relación:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$$

Verifique que R es una relación de equivalencia. Encuentre todas las clases de equivalencia.

Con ayuda de Mathematica

<< Combinatorica

A = {};

For [i=1, i<=4, A = Append[A, i], i++];

B = Delete[A, 4];

R = Union[CartesianProduct[B, B], {{4, 4}}];

Tipo Relación $[R, A]$

Para encontrar las clases de equivalencia:

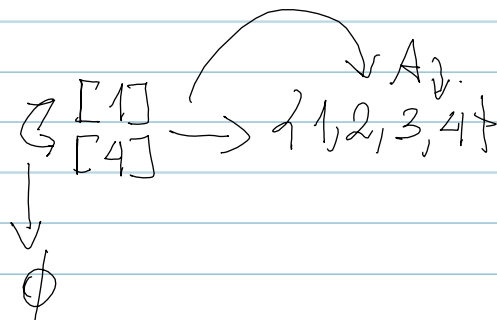
```

For [i=1, i ≤ Length[A], ci = {}];
  For [j=1, j ≤ Length[A],
    If [MemberQ[R, {A[[i]], A[[j]]}] == True,
      ci = Append[ci, A[[j]]]; j++];
  Print["[", i, "]", " = ", ci, "; i++"]

```

Out[]

[1] = {1, 2, 3} ✓
 [2] = {1, 2, 3} ✓
 [3] = {1, 2, 3} ✓
 [4] = {4}



Teorema Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A ,
 entonces $P = \{[a] \mid a \in A\}$ es una partición de A .

Ejemplo Verifique con Mathematica el teorema anterior sobre la relación
 aRb si y solo si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \equiv r \pmod{3}$ y $b \equiv r \pmod{3}$. R

```

For [i=1, i ≤ Length[A], ci = {}];
  For [j=1, j ≤ Length[A],
    If [MemberQ[R, {A[[i]], A[[j]]}] == True,
      ci = Append[ci, A[[j]]]; j++]; i++];

```

```

P = {};
For [i=1, i ≤ Length[A], P = Append[P, ci]; i++];
P = DeleteDuplicates[P];

```

Set PartitionQ[P, A] → True

Teorema Para una partición P sobre un conjunto A la relación aRb si y solo si a y b se encuentran en el mismo elemento de P , es una relación de equivalencia.

Ejemplo Determine todas las relaciones de equivalencia sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, que se generan al considerar todas las particiones sobre A .

En Mathematica:

```

{ << Combinatorica'
  CP = SetPartitions[4];
  For[i = 1, i <= Length[CP], i++,
    For[j = 1, j <= Length[CP], j++,
      Rj = CartesianProduct[CP[[j]], CP[[j]];
      Ri = Union[Ri, Rj];
      Print["R", i, " = ", Ri];
    ]
  ]

```

Out[]

$R_1 = \{ \{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{4, 4\} \}$

$R_2 = \{ \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{4, 4\} \}$

\vdots

$R_{14} = \{ \{1, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 4\} \}$

$R_{15} = \{ \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 4\} \}$

K SetPartitions[n , K]
 $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Ejemplo Elabore un programa con Mathematica que genere de manera pseudoaleatoria m relaciones de equivalencia sobre el conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$, siendo n y m números naturales leídos por teclado.

se usa el comando RandomSetPartition [A]:

<< Combinatoria

$n = \text{Input}["\text{Digite la longitud del conjunto A: } n"];$

$m = \text{Input}["\text{Digite la cantidad de particiones deseadas sobre A: } m"];$

→ $A = \{1\};$

For [$i = 1, i \leq n, A = \text{Append}[A, i]; i++$];

Print ["La longitud de A es ", n];

→ For [$i = 1, i \leq m, R_i = \{1\}; C_i = \text{RandomSetPartition}[A];$

→ For [$j = 1, j \leq \text{Length}[C_i],$

$Pt_j = \text{CartesianProduct}[C_i[[j]], C_i[[j]]];$

$R_i = \text{Union}[R_i, Pt_j]; j++$];

Print ["R", i , " = ", R_i]; $i++$];

También:

RandomKSetPartition [A, k]